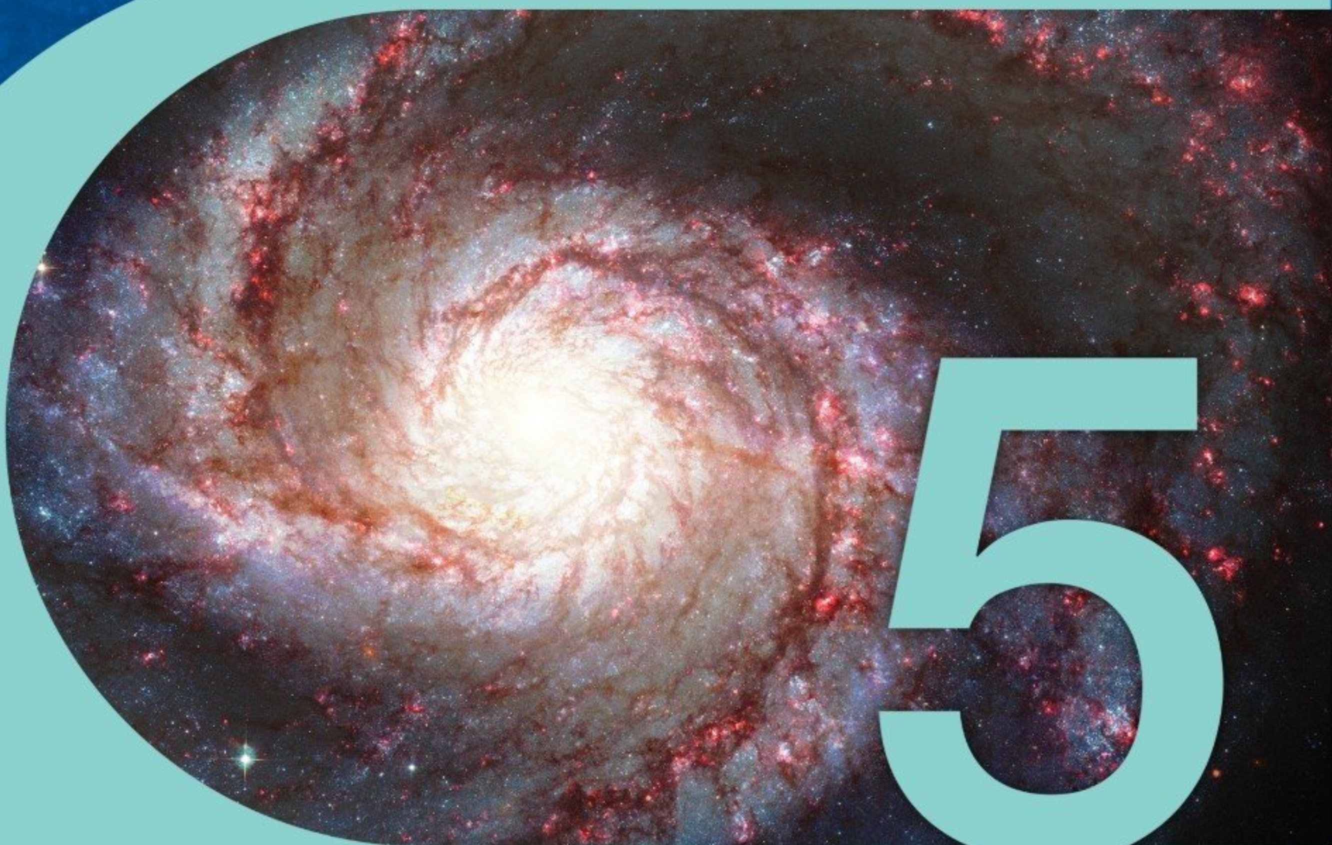


MATEMÁTICA

LIBRO CARPETA





puerto de palos

1 Números reales

1. Los números reales

▶ SABERES DINÁMICOS

Existen diferentes tipos de números que forman el conjunto de los **números reales** (ℝ).

• Los primeros que se pueden mencionar son los **números naturales** (ℕ): 1, 2, 3, 4, ...

• Si a estos números se les agregan los negativos y el cero, se forman los **números enteros** (ℤ): ..., −2, −1, 0, 1, 2, ...

• Al tomar la razón entre dos enteros (con el divisor distinto de cero), se construye el conjunto de los **números racionales** (ℚ). Entonces, cualquier número racional **r** puede expresarse como:

$$r = \frac{m}{n} \text{ con } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ y\ n \neq 0$$

• También hay números reales que no se pueden expresar como una razón entre enteros, que son los **números irracionales** (𝕀), cuya característica es que tienen infinitas cifras decimales no periódicas: π , $\sqrt{2}$, 1,243091...

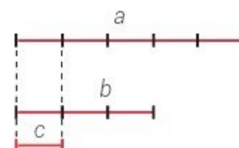
TIP

∈ significa pertenece.

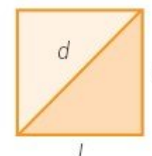
∧ significa y.

Segmentos conmensurables e inconmensurables

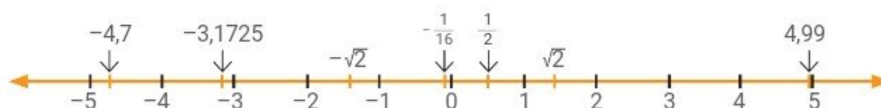
Dos segmentos **a** y **b** son **conmensurables** cuando existe un tercer segmento **c** que entra una cantidad de veces entera en cada uno de los segmentos **a** y **b**.



En cambio, cuando no existe un tercer segmento **c**, los segmentos son **inconmensurables**, como lo son la diagonal de un cuadrado con respecto a uno de sus lados. La razón de la diagonal **d** de un cuadrado y su lado **l** es inconmensurable, es decir, es un **número irracional**.



Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, llamada **recta real**. Se toma un punto como referencia llamado **origen** (número real **0**). Todo número positivo se representa por un punto a la derecha del origen y todo número negativo, por un punto a la izquierda del origen.



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/raiz2 * para mirar un video en el que se demuestra geométricamente que la raíz cuadrada de 2 es un número irracional.

*Enlace acortado de https://youtu.be/1cJ9_8hDUNs

Los números reales forman un conjunto:

• **Ordenado**: es posible decir que un número real **a** es menor que **b** y se simboliza como **a < b**. Esto significa que, en la recta real, **a** se encuentra a la izquierda de **b**.

• **Denso**: entre dos números reales siempre existe otro número real.

• **Continuo**: a cada número le corresponde un punto en la recta y recíprocamente.

Aproximación y redondeo

Para **aproximar un número por redondeo**, debe primero explicitarse hasta qué cifra decimal se va a considerar como representativa y luego tener en cuenta la cifra que se encuentra a su derecha, así:

• si la cifra de la derecha es 0, 1, 2, 3 o 4, la cifra considerada se deja igual y se produce un error por defecto.

• si la cifra de la derecha es 5, 6, 7, 8, 9, a la cifra considerada se le suma 1 y se comete un error por exceso.

ACTIVIDADES

1. Los números reales

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Los lados de un rectángulo miden respectivamente 6,5 cm y 5,2 cm. ¿Son conmensurables?
   b. El diámetro de una circunferencia y su perímetro ¿son magnitudes conmensurables? ¿Por qué?
   c. ¿Es correcto afirmar que $\pi = 3{,}142$? ¿Por qué?

2. Determinen si los siguientes números son racionales o irracionales.

a. $\frac{\pi}{2}$ ____________

b. $2{,}1\overset{\frown}{9}$ ____________

c. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$ ____________

d. $\frac{25}{16}$ ____________

e. $\sqrt[3]{0{,}027}$ ____________

f. $(3^2\pi + 1) - (\sqrt{25} + 2^2)\pi$ ____________

3. Escriban >, < o = según corresponda, sin utilizar la calculadora.

a. $1{,}732 \ \square \ \sqrt{3}$

b. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \ \square \ \sqrt{\frac{5}{4}}$

c. $\sqrt{47} \ \square \ \sqrt{7^2 - 2}$

d. $\sqrt{8} \ \square \ \sqrt{18}$

e. $\frac{40}{33} \ \square \ 1{,}21$

f. $1{,}0\overset{\frown}{5} \ \square \ \frac{19}{18}$

4. Escriban >, < o = según corresponda, teniendo en cuenta las condiciones dadas en cada caso.

a. Si $a > c > 0$, entonces $\sqrt{c} \ \square \ \sqrt{a}$.

b. Si $0 < a < 1$, entonces $\sqrt{a} \ \square \ \sqrt[3]{a}$.

c. Si $a > 1$, entonces $\sqrt{a} \ \square \ \sqrt[3]{a}$.

d. Si $a > c > 0$, entonces $\frac{1}{\sqrt{a}} \ \square \ \frac{1}{\sqrt{c}}$.

5. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen en sus carpetas los casos falsos.

a. Toda fracción es un número racional. $\square$

b. Todo número racional tiene una expresión decimal. $\square$

c. Todo número decimal se puede expresar como fracción. $\square$

d. Todo número irracional tiene una expresión decimal. $\square$

e. Todo número irracional tiene una expresión como fracción. $\square$

f. Un número real puede ser racional e irracional a la vez. $\square$

g. El conjunto de los números naturales es denso. $\square$

6. Tengan en cuenta las condiciones pedidas en cada caso y respondan. Expliquen las respuestas.

a. $x \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{17} < x < 8$. ¿Cuántos números existen? ____________

b. $x \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{17} < x < 8$. ¿Cuántos números existen? ____________

c. $x \in \mathbb{I} \wedge \sqrt{17} < x < 8$. ¿Cuántos números existen? ____________

7. Aproximen cada uno de los siguientes números reales según lo indicado en cada caso.

a. $\sqrt{2}$ a los milésimos. ____________

b. $1{,}31\overset{\frown}{6}$ a los centésimos. ____________

c. π a los décimos. ____________

d. $\frac{3}{2}\pi$ a los centésimos. ____________

2. Intervalos

▶ SABERES DINÁMICOS

Intervalos reales

Ciertos conjuntos de números reales se denominan **intervalos**, y se representan geométricamente con semirrectas o segmentos sobre la recta real. Si **a** y **b** son **números reales** tales que **a < b**, entonces existen las siguientes posibilidades:

Notación	Propiedad del conjunto	Representación sobre la recta real
$(a; b)$	$x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b$	a b
$[a; b]$	$x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b$	a b
$[a; b)$	$x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b$	a b
$(a; b]$	$x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b$	a b
$(a; +\infty)$	$x \in \mathbb{R} \wedge x > a$	a
$[a; +\infty)$	$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a$	a
$(-\infty; b)$	$x \in \mathbb{R} \wedge x < b$	b
$(-\infty; b]$	$x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b$	b
$(-\infty; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	

Debe notarse que se utilizan:

- **Paréntesis** cuando el o los extremos **no pertenecen al intervalo**.
- **Corchetes** cuando el o los extremos **pertenecen al intervalo**.
- **Paréntesis** cuando alguno de los extremos (o ambos) es **infinito**.

TIP

∩ significa intersección.
U significa unión.
⇒ significa entonces.
∨ significa o.

Uniones e intersecciones de intervalos

La **intersección de dos intervalos (∩)** consta de los números reales que están en ambos intervalos a la vez.
La **unión de dos intervalos (U)** consta de los números que están en un intervalo o en el otro, es decir, en ambos.



a. $(1; 3) \cap [2; 7]$ → $x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 3 \wedge 2 \leq x \leq 7$ →
⇒ $(1; 3) \cap [2; 7] = [2; 3)$

1 2 3 4 5 6 7
[2; 3)

b. $(1; 3) \cup [2; 7]$ → $x \in \mathbb{R} \,/\, 1 < x < 3 \vee 2 \leq x \leq 7$ →
⇒ $(1; 3) \cup [2; 7] = (1; 7]$

1 2 3 4 5 6 7
(1; 7]

En estos ejemplos, para una mejor visualización, usamos **círculos sin relleno** en lugar de **paréntesis** y **círculos con relleno** en lugar de **corchetes**.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/repin * para observar cómo se representan los intervalos en la recta real usando GeoGebra.

*Enlace acortado dehttps://www.geogebra.org/m/bw85KpRz

2. Intervalos

Test de comprensión

8. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿A cuál de los siguientes intervalos pertenece el número π: (3,15; 4) o (3,14; 4)?

b. ¿Es cierto que la unión entre los intervalos (−∞; 2) y (2; +∞) es el conjunto de los números reales?

c. ¿Es cierto que la intersección entre los intervalos (1; 1,41) y ($\sqrt{2}$; 2) es vacía?

9. Completen la siguiente tabla.

Notación de intervalos	Propiedad del conjunto	Representación gráfica
		[−2 ; 0) marcado en la recta: −2, −1, 0
(−∞; −4]		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \wedge 3 \le x \le \frac{11}{2}\right\}$	
		[99 ; +∞) marcado en la recta: 99, 100, 101, 102
(−1; 7)		
	$\{x \in \mathbb{R} \wedge x < 10\}$	
($\sqrt{2}$; 8]		
	$\left\{x \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{3} \le x < 4\right\}$	

10. Indiquen el intervalo solución en cada caso y representen el resultado en la recta real.

a. (−2; 0) U (−1; 1) = ______

b. [−4; 6] ∩ [0; 8] = ______

c. (−∞; 6) U (2; 10) = ______

d. (−2; 4) ∩ [0; +∞) = ______

e. (−3; π] ∩ [3,15; +∞) = ______

f. (−∞; −1] U (−2; +∞) = ______

11. Escriban U (unión) o ∩ (intersección) según corresponda para que se verifique la igualdad.

a. [−5; 6) ☐ [0; 6] = [0; 6)

b. (−∞; −1] ☐ (−2; 4] = [−∞; 4]

c. (−∞; 4) ☐ (4; 5] = Ø

d. (−∞; 2] ☐ (1; +∞) = $\mathbb{R}$

12. Tengan en cuenta los conjuntos A, B y C e indiquen el conjunto solución en cada caso. Representen el intervalo solución en una recta real en sus carpetas.

$A = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \ge -2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \wedge x < 4\}$ $C = \{x \in \mathbb{R} \wedge -1 < x \le 5\}$

a. B U C = ______ b. B ∩ C = ______ c. A ∩ C = ______ d. A ∩ B = ______

3. Valor absoluto de un número real

▶ SABERES DINÁMICOS

El **valor absoluto** o **módulo de un número real x** se denota por **|x|** y representa su distancia al 0 sobre la recta real, por ser la distancia siempre positiva o cero, para todo $x \in \mathbb{R}$ se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert x\rvert \geq 0$	$\lvert -2\rvert = -(-2) = 2 \geq 0$ $\lvert 4\rvert = 4 \geq 0$ $\lvert 0\rvert = 0 \geq 0$	El valor absoluto de un número real siempre es positivo o cero.
2. $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$	$\lvert \pi\rvert = \lvert -\pi\rvert$ $\lvert 2\rvert = \lvert -2\rvert$	Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert x \,.\, y\rvert = \lvert x\rvert \,.\, \lvert y\rvert$	$\lvert -3 \,.\, 6\rvert = \lvert -3\rvert \,.\, \lvert 6\rvert$ $\lvert -18\rvert = 3 \,.\, 6$ $18 = 18$	El valor absoluto de un producto entre dos números reales es equivalente al producto de los valores absolutos de cada uno de los números reales.
4. $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ con $y \neq 0$	$\left\lvert \frac{10}{-5} \right\rvert = \frac{\lvert 10\rvert}{\lvert -5\rvert}$ $\lvert -2\rvert = \frac{10}{5}$ $2 = 2$	El valor absoluto del cociente entre dos números reales es el cociente entre los valores absolutos de los números reales.
5. $\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert 2 + (-6)\rvert \leq \lvert 2\rvert + \lvert -6\rvert$ $\lvert -4\rvert \leq 2 + 6$ $4 \leq 8$	El valor absoluto de la suma de dos números reales es menor o igual que la suma de los valores absolutos de cada uno de los números reales (desigualdad triangular).

Las siguientes propiedades del valor absoluto permiten resolver inecuaciones.

6. Si $k > 0$, $|x| > k \Rightarrow x < -k \vee x > k \Rightarrow x \in (-\infty; -k) \cup (k; +\infty)$



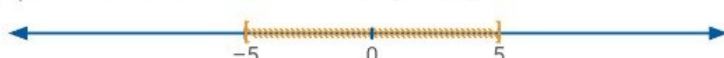
$|x| > 2 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$



7. Si $k > 0$, $|x| < k \Rightarrow x < k \wedge x > -k \Rightarrow x \in (-k; k)$



$|x| \leq 5 \Rightarrow x \leq 5 \wedge x \geq -5 \Rightarrow x \in [-5; 5]$



3. Valor absoluto de un número real

Test de comprensión

13. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Para qué valores de **x** se cumple que $|x| > -1$? ¿Y para cuáles $|x| < 0$?

b. ¿Es cierto que $|-(x \,.\, y)| = |x| \,.\, |y|$?

c. ¿Es cierto que $|x - y| = |y - x|$?

14. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a. $|3 + (-4)| = |3| + |-4| = 3 + 4 = 7$ ☐

b. $\frac{|-4|}{|5|} = \frac{|4|}{-5}$ ☐

c. Si $x > 0$, $|3x - 5x| = 2x$ ☐

d. Si $x < 0$, $|2x + 3x| = 5x$ ☐

e. Si $x > 0 \wedge y < 0$, $|x \,.\, y| = x \,.\, y$ ☐

f. Si $|x| > 4 \Rightarrow x \in (-4; 4)$ ☐

15. Unan cada expresión con su conjunto solución.

a. $|x| = 2$ • $S = \mathbb{R}$

b. $|x| > 2$ • $S = (-2; 2)$

c. $|x| < 2$ • $S = \emptyset$

d. $-|x| > 1$ • $S = \{-2; 2\}$

e. $-|x| < 4$ • $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$



16. Expresen el conjunto de valores que puede tomar la variable en cada caso. Luego, representen en la recta real.

a. $|x| < 4 \wedge x > 0$ ____________________



c. $5 - |x| \geq 3 \wedge |x| \neq 2$ ____________________



b. $2\,|x| > 6 \wedge |x| \leq 4$ ____________________



d. $\left|\frac{x}{-2}\right| \geq 3 \wedge x \leq -4$ ____________________



17. Expresen en lenguaje simbólico y hallen el conjunto solución.

a. Todos los números reales cuya distancia a cero sea menor que 1. ____________________

b. Todos los números reales cuya distancia a cero sea mayor o igual que 2. ____________________

18. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen en sus carpetas los casos falsos.

a. Los números opuestos tienen el mismo valor absoluto. ☐

b. El valor absoluto de una suma es mayor o igual a la suma de los valores absolutos. ☐

c. El valor absoluto de un valor real puede ser negativo. ☐

d. El valor absoluto del cuadrado de un número es igual al cuadrado de su valor absoluto. ☐

4. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

▶ SABERES DINÁMICOS

Para resolver **ecuaciones e inecuaciones con módulo** es necesario tener en cuenta la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• Para **resolver ecuaciones** en las que la incógnita está dentro de un **módulo**, se deben tener en cuenta tanto la definición de módulo como sus propiedades.

$x + 3 \,.\, |x - 2| = 2x + 1$

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$	∨	$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$	Condición necesaria.
$x + 3 \,.\, (x - 2) = 2x + 1$	∨	$x + 3 \,.\, (-x + 2) = 2x + 1$	Se elimina el módulo aplicando
$x + 3x - 6 = 2x + 1$	∨	$x - 3x + 6 = 2x + 1$	la definición.
$4x - 2x = 1 + 6$	∨	$-2x - 2x = 1 - 6$	
$2x = 7 \Rightarrow x = 3{,}5$	∨	$-4x = -5 \Rightarrow x = 1{,}25$	
$x \geq 2 \wedge x = \frac{7}{2}$	∨	$x < 2 \wedge x = \frac{5}{4}$	Se determina el conjunto solución.

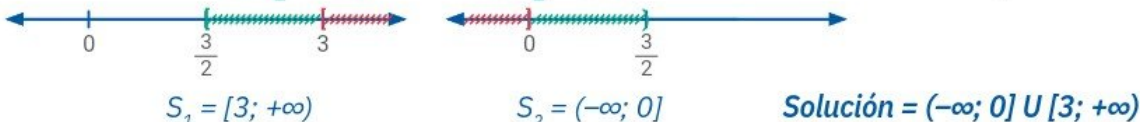


***Solución* = $\left\{\frac{5}{4}; \frac{7}{2}\right\}$**

• En el caso de las **inecuaciones**, se debe recordar que al multiplicar o dividir por un número negativo a ambos lados de la desigualdad, el sentido de esta cambia.

$4 + |2x - 3| \geq 7$

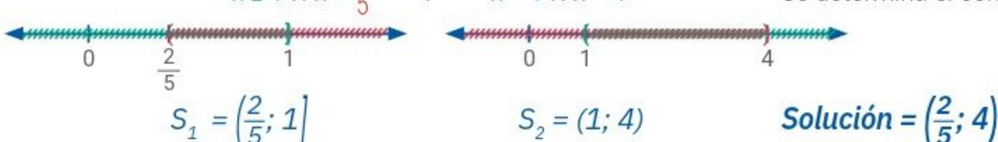
$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$	∨	$2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$	Condición necesaria.
$4 + 2x - 3 \geq 7$	∨	$4 - 2x + 3 \geq 7$	Se elimina el módulo aplicando
$2x \geq 7 - 4 + 3$	∨	$-2x \geq 7 - 4 - 3$	la definición.
$2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$	∨	$2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$	
$x \geq \frac{3}{2} \wedge x \geq 3$	∨	$x < \frac{3}{2} \wedge x \leq 0$	Se determina el conjunto solución.



$S_1 = [3; +\infty)$ *$S_2 = (-\infty; 0]$* ***Solución* = $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$**

$3 \,.\, |1 - x| < 2x + 1$

$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$	∨	$1 - x < 0 \Rightarrow x > 1$	Condición necesaria.
$3 \,.\, (1 - x) < 2x + 1$	∨	$3 \,.\, (-1 + x) < 2x + 1$	Se elimina el módulo aplicando
$3 - 3x < 2x + 1$	∨	$-3 + 3x < 2x + 1$	la definición.
$-3x - 2x < 1 - 3$	∨	$3x - 2x < 1 + 3 \Rightarrow x < 4$	
$-5x < -2 \Rightarrow x > \frac{2}{5}$	∨		
$x \leq 1 \wedge x > \frac{2}{5}$	∨	$x > 1 \wedge x < 4$	Se determina el conjunto solución.



$S_1 = \left(\frac{2}{5}; 1\right]$ *$S_2 = (1; 4)$* ***Solución* = $\left(\frac{2}{5}; 4\right)$**

4. Ecuaciones e inecuaciones con módulo

Test de comprensión

19. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es correcto decir que el conjunto solución de $|x - k| < 0$ es vacío? ¿Por qué?

b. ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ la inecuación $k\,|x| \geq 0$ tiene una única solución?

c. ¿Cuáles son los posibles conjuntos solución de $|x - a| = b$ según los valores que pueda tomar $b \in \mathbb{R}$?

20. Resuelvan las siguientes ecuaciones en sus carpetas y escriban el conjunto solución en cada caso.

a. $|x| = 4$ ______

b. $|x - 1| = 3$ ______

c. $|12 - 5x| = 8$ ______

d. $|x + 4| = -2$ ______

e. $|3x - 2| = 7$ ______

f. $3 . |x - 1| + 2 = 5 - x$ ______

g. $|4x - 2| = 2x + 3$ ______

h. $5 . |3x - 1| = 6x - 5$ ______

i. $|x + 1| = 2x + 3$ ______

j. $x^2 = (-8 + 24)^{-1}$ ______

21. Resuelvan las siguientes inecuaciones y escriban el conjunto solución en cada caso.

a. $|x + 5| \geq 2x$ ______

b. $-|x + 4| > 5 + 2x$ ______

c. $11 - 6x \leq -|2x + 1|$ ______

d. $5 . |1 - x| > 2x - 3$ ______

e. $-2 - |x + 4| > -5$ ______

f. $2 . |x + 1| < 6$ ______

g. $x^2 - 36 \geq 0$ ______

h. $x^2 + 9 < 0$ ______

DinámicaMente

Tengan en cuenta que la distancia entre dos números reales **a** y **b** se expresa como $D_{(a,b)} = |a - b|$ y resuelvan. Luego, comenten con sus compañeros cómo lo pensaron.

a. Todos los números que se encuentran a una distancia menor o igual que 4 de **m** pertenecen al intervalo $[-2; 6]$. ¿Cuál es el valor de **m**? ¿El valor de **m** es único?

b. Todos los números que se encuentran a una distancia mayor que **m** del número real -1 pertenecen al intervalo $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$. ¿Cuál es el valor de **m**? ¿El valor de **m** es único?



8. Circunferencia

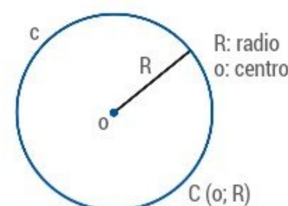
▶ SABERES DINÁMICOS

Cónicas



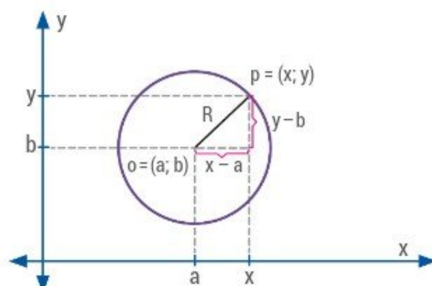
Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición geométrica.
Una **cónica** es el **lugar geométrico** que se obtiene cuando se interseca una superficie cónica con un plano. Según la inclinación del plano, la cónica que se genera puede ser: **circunferencia**, **elipse**, **parábola** o **hipérbola**.

Circunferencia



La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro una distancia fija llamada radio.
Los elementos para poder obtener una circunferencia son su **centro** (**o**) y su **radio** (**R**).

Para poder escribir la **ecuación canónica de la circunferencia** con **centro** en **o = (a; b)** y **radio R** se la ubica en un sistema de ejes coordenados cartesianos.



- Aplicando la definición de circunferencia, la distancia entre el centro **o** y el punto **p** perteneciente a la circunferencia, por el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ **Ecuación canónica de la circunferencia**

- Si el centro se ubica en el origen de coordenadas: $x^2 + y^2 = R^2$

A partir de la ecuación canónica se puede obtener la **ecuación general de la circunferencia**.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$
$$x^2 + y^2 - \underbrace{2a}_{A}x - \underbrace{2b}_{B}y + \underbrace{a^2 + b^2 - R^2}_{C} = 0$$

Para recordar pág. 37

$x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$ **Ecuación general de la circunferencia**

Determinen la ecuación canónica de la circunferencia que:

a. *Tiene centro en el punto (4; −2) y radio 3.*

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + [y - (-2)]^2 = 3^2 \Rightarrow \mathbf{(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9}$

b. *Tiene por ecuación general a $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$.*

Se completan cuadrados: $x^2 + 10x + 25 - 25 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 13 = 0 \Rightarrow$

$(x + 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 13 = 0 \Rightarrow \mathbf{(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9}$

8. Circunferencia

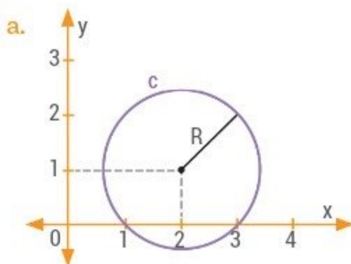
Test de comprensión

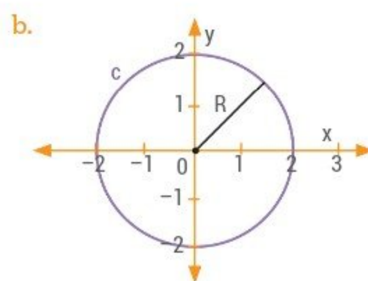
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. El centro de la circunferencia $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$, ¿es el punto (1; 2)?
   b. El centro de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ ¿es un punto perteneciente al eje x?
   c. ¿Es cierto que el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ es $R = 2$?

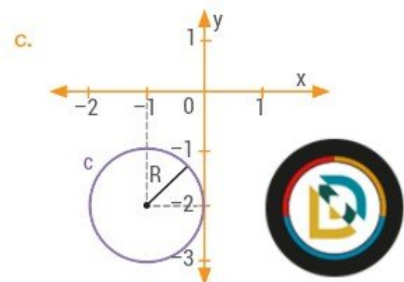
2. Completen la tabla con lo pedido en cada caso.

Ecuación canónica	Ecuación general	Centro	Radio
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$			
		(−3; 0)	2
	$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$		
		$\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{2}$

3. Escriban la ecuación canónica de cada una de las siguientes circunferencias.

a.


b.


c.


4. Escriban la ecuación general y la canónica de la circunferencia que cumple con las condiciones pedidas en cada caso; luego, realicen el gráfico en sus carpetas.

a. Tiene centro en el punto (3; 0) y pasa por el punto (1; 2).

Ecuación canónica: ______________ Ecuación general: ______________

b. Su centro es el punto medio del segmento que une los puntos (−3; 3) y (1; 3), pertenecientes a ella.

Ecuación canónica: ______________ Ecuación general: ______________

c. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que distan una distancia $\sqrt{3}$ del punto (0; −2).

Ecuación canónica: ______________ Ecuación general: ______________

5. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6y - A = 0$, planteen y resuelvan lo pedido en cada caso. Grafiquen cada una de las situaciones en sus carpetas.

a. Hallen el valor del número real A para que el radio de la circunferencia sea 5. ______________

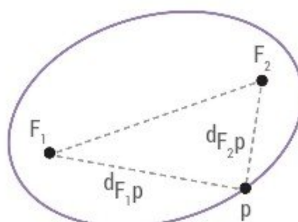
b. Si $A = 0$, el punto (1; 2) ¿es interior o exterior a la circunferencia? ______________

c. ¿Cuál es el radio de la circunferencia, si $A = 7$? ______________

9. Elipse

▶ SABERES DINÁMICOS

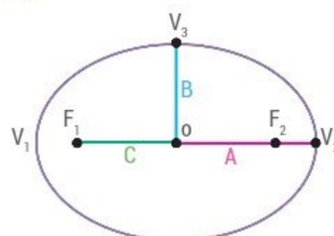
La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos** se mantiene **constante** (**k**).



$$\overline{F_1p} + \overline{F_2p} = k$$

Elementos de la elipse

- Centro → o
- Focos → F_1, F_2
- Vértices → V_1, V_2, V_3, V_4
- Distancia focal → $\overline{F_1F_2} = 2C$
- Diámetro mayor → $\overline{V_1V_2} = 2A$
- Diámetro menor → $\overline{V_3V_4} = 2B$

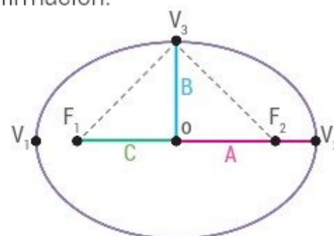


Relación entre A, B y C:

- Si se considera el punto V_2, por pertenecer a la elipse cumple con la afirmación:

$$\overline{F_1V_2} + \overline{F_2V_2} = k$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$(A + C) + (A - C) = k \Rightarrow \mathbf{2A = k}$$

- Entonces: $\left.\begin{array}{l}\overline{V_3F_1} + \overline{V_3F_2} = 2A \\ \text{pero } \overline{V_3F_1} = \overline{V_3F_2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{V_3F_1} = \overline{V_3F_2} = A$



- Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo V_3oF_1 se cumple: $A^2 = B^2 + C^2$

Excentricidad

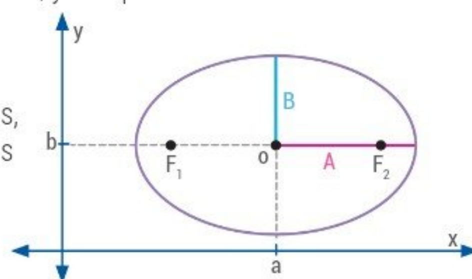
La **excentricidad** (**e**) es un parámetro que permite clasificar a las cónicas. Se define como el cociente entre C y A.

$$e = \frac{C}{A}$$

Como en la **elipse** se cumple que $C < A \Rightarrow 0 < e < 1$, en cambio en la **circunferencia** $e = 0$. Geométricamente, cuanto mayor es la distancia entre los focos, mayor es la excentricidad, y la elipse se ve menos ovalada.

Ecuación de la elipse

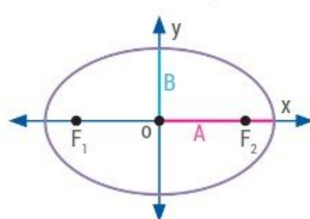
Si se representa la elipse en un sistema de coordenadas cartesianas, para poder escribir su ecuación es necesario conocer su centro y las medidas de los diámetros.



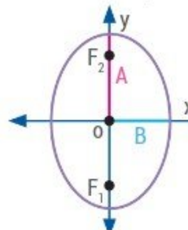
$$\frac{(x - a)^2}{A^2} + \frac{(y - b)^2}{B^2} = 1$$

Ecuación canónica de la elipse con centro en o = (a; b).

Si el centro de la elipse es el origen de coordenadas, su disposición depende de la ubicación del diámetro mayor:



$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

Debe notarse que la ubicación de los focos siempre es sobre el diámetro mayor de la elipse.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/elip* para ver una representación interactiva de una elipse y ampliar los conocimientos sobre este tema.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/nchasgs2

9. Elipse

Test de comprensión

6. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Qué sucede si las medidas de los diámetros de una elipse coinciden?

b. Si una cónica tiene excentricidad mayor que 1, ¿se trata de una elipse?

c. Los focos de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ¿se encuentran ubicados sobre el eje x?

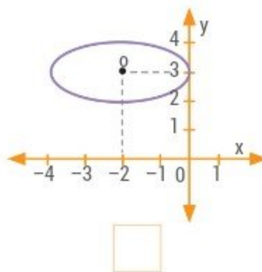
7. Completen la tabla con lo pedido.

Ecuación	Centro	A	B	Excentricidad
$\frac{x^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$				
$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$				
$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$				
$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y+4)^2}{10} = 1$				

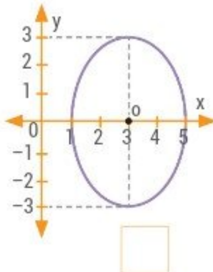


8. Escriban en cada elipse la letra de la ecuación que le corresponde.

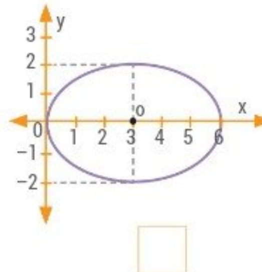
a. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ b. $(x+2)^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ c. $\frac{(x+2)^2}{4} + (y-3)^2 = 1$ d. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



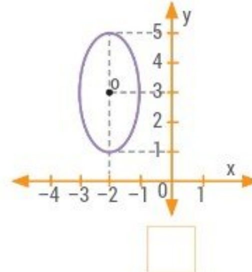














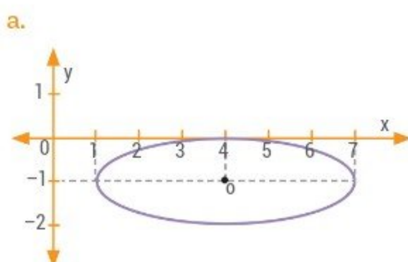
9. Determinen la ecuación de la elipse que cumpla con las condiciones dadas en cada caso. Luego, grafiquen cada ecuación en sus carpetas.

a. Tiene sus vértices ubicados en los puntos (−1; 2), (5; 2), (2; 0) y (2; 4). ____________________

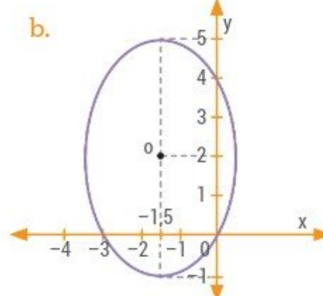
b. Tiene sus focos ubicados en los puntos (−1; 1) y (−1; 5), y su excentricidad vale $\frac{2}{3}$. ____________________

10. Observen los gráficos y escriban la ecuación de la elipse correspondiente a cada uno.

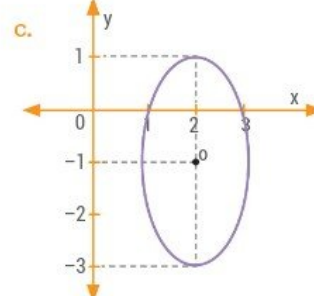
a.



b.



c.



____________________ ____________________ ____________________

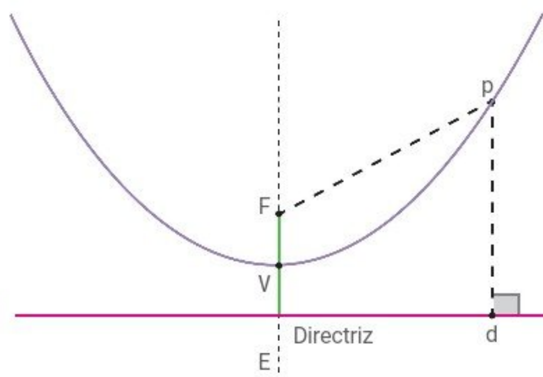
10. Parábola

▶ SABERES DINÁMICOS

La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **foco** y de una recta llamada **directriz**.

$\overline{Fp} = \overline{pd}$

Para recordar pág. 37



Elementos de la parábola

- Foco → F
- Vértice → V
- Eje de simetría → E
- Directriz → D
- Distancia del foco a la directriz → P

Ecuación de la parábola

Para poder expresar la **ecuación de la parábola** es necesario conocer la distancia entre el foco y la directriz (P) y las coordenadas del vértice. Si se ubica a la parábola en un sistema de coordenadas cartesianas:

• Si el vértice es el punto (a; b)		• Si el vértice es el origen de coordenadas	
$x - a = \frac{1}{2P} \cdot (y - b)^2$	$y - b = \frac{1}{2P} \cdot (x - a)^2$	$x = \frac{1}{2P} \cdot y^2$	$y = \frac{1}{2P} \cdot x^2$

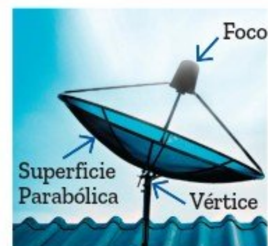
La disposición de la parábola dependerá del signo del coeficiente de la parte cuadrática.

$x = \frac{1}{4} y^2$	$x = -\frac{1}{4} y^2$	$y = \frac{1}{4} x^2$	$y = -\frac{1}{4} x^2$

Áreas dinámicas [Matemática y Tecnología]

Antenas parabólicas

La parábola se puede definir como una curva que surge al hacer un corte a un cono. Si esta definición se aplicara a un objeto tridimensional, obtendríamos una superficie denominada paraboloide. Un paraboloide con un receptor de señal en el foco puede conseguir que todas las señales que reboten en el paraboloide sean enviadas al receptor, sin apuntar directamente al mismo.



Suelo (P unidades del vértice)

10. Parábola

Test de comprensión

11. Respondan y expliquen las respuestas.

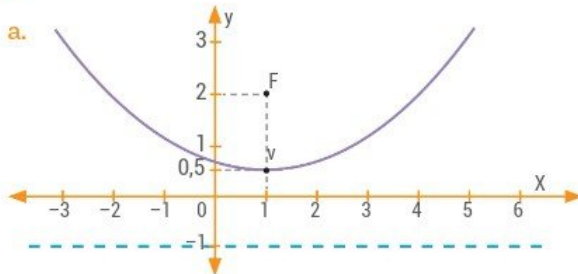
a. Si la distancia entre el foco y la directriz es 4, ¿cuál es la distancia entre el foco y el vértice?

b. Si el vértice de una parábola es el punto (0; 0) y la variable lineal es x, ¿su foco está sobre el eje y?

c. ¿Es correcto afirmar que el vértice de la parábola $(y + 1) = 2 . (x - 3)^2$ es el punto (1; −3)?

12. Indiquen para cada una de las siguientes parábolas su ecuación, vértice, foco y directriz.

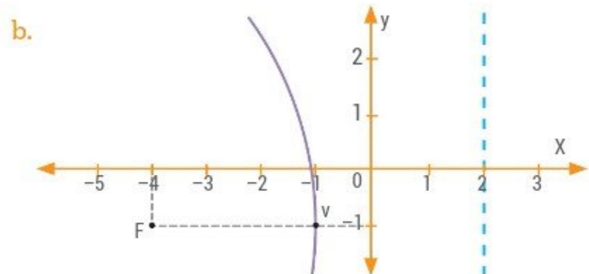
a.



Ecuación: ____________

Vértice: ______ Foco: ______ Directriz: ______

b.



Ecuación: ____________

Vértice: ______ Foco: ______ Directriz: ______

13. Escriban la ecuación canónica de la parábola que cumple con las condiciones dadas en cada caso. Luego, realicen el gráfico de cada una en sus carpetas.

a. Tiene vértice en el punto (3; −3), pasa por el punto (1; −4) y su eje es la recta x = 3. ____________

b. Su foco es el punto (−3; 1) y su directriz es la recta x = −2. ____________

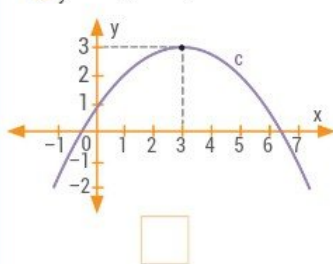
14. Escriban en cada parábola la letra de la ecuación que le corresponde.

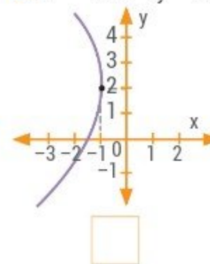
a. $y^2 - 4x = -4$

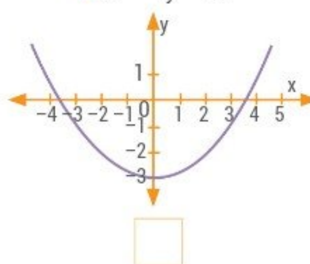
b. $x^2 - 6x + 4y = 3$

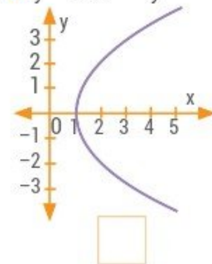
c. $x^2 - 4y = 12$

d. $y^2 + 8x - 4y = -12$











DinámicaMente



Reúnanse con un compañero, planteen el problema y respondan.

Los cables que sostienen un puente colgante adquieren forma de parábola, como se muestra en la figura. Las torres que sostienen los cables están separadas por 100 m y tienen una altura de 25 m. Los cables tocan la ruta en la mitad de la distancia entre las torres. ¿Cuál es la altura del cable en un punto situado a 20 m desde el punto medio?

____

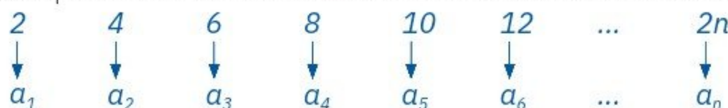


3 Sucesiones

12. Sucesiones. Sucesiones aritméticas

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números, uno a continuación del otro; por ejemplo, el conjunto de los números pares. Se denomina **término** a cada uno de los elementos de la sucesión.

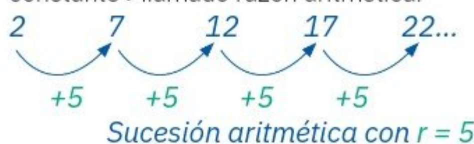


En algunas sucesiones se puede encontrar un **término general** a_n (término enésimo), que es la fórmula de un término cualquiera en función del lugar que ocupa. En la sucesión **2; 4; 6; 8; 10; 12; ...**, el término general es $\mathbf{a_n = 2 . n}$. Si se conoce el término general, se puede hallar cualquier término de la sucesión reemplazando en forma consecutiva los números naturales en el valor de **n** del término general.

Si el término general de una sucesión es $a_n = n + 1$, entonces la sucesión será: 2; 3; 4; ...; n + 1.

Sucesiones aritméticas

Se denomina **sucesión aritmética** a aquella en la cual cada término se obtiene sumando al anterior un número constante **r** llamado razón aritmética.



Sucesión aritmética con r = 5

Para que una sucesión sea aritmética debe cumplirse:

- $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = r$

  $r = a_n - a_{n-1} \wedge n \in \mathbb{N} - \{1\}$
- El término general a_n es: $a_n = a_1 + (n - 1) . r$

- Para calcular un término determinado de una sucesión aritmética conociendo:

  - dos términos consecutivos, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_5 si $a_1 = 3$ y $a_2 = -2$.

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -2 - 3 \Rightarrow r = -5$ — **1.** Se halla la razón.

$a_5 = 3 + (5 - 1) . (-5) \Rightarrow a_5 = 3 + 4 . (-5) \Rightarrow a_5 = 3 - 20 \Rightarrow \mathbf{a_5 = -17}$ — **2.** Se calcula cada término.

  - otro término y la razón, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_3 si $a_8 = 4$ y $r = -2$.

Se considera a a_3 como primer término ($a_3 \Rightarrow a_1$) y a a_8, por lo tanto, como sexto ($a_8 \Rightarrow a_6$).

$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow a_6 = a_1 + (6 - 1) . r \Rightarrow 4 = a_1 + 5 .(-2) \Rightarrow a_1 = 4 + 10 \Rightarrow a_1 = 14 \Rightarrow \mathbf{a_3 = 14}$

- Para calcular el número de términos de una sucesión aritmética, se deben seguir estos pasos.

Calculen el número de términos de la sucesión sabiendo que $a_1 = -2$; $a_2 = 1$; ...; $a_n = 10$.

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 1 - (-2) \Rightarrow r = 3$

$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow 10 = -2 + (n - 1) . 3 \Rightarrow 12 = (n - 1) . 3 \Rightarrow 4 = n - 1 \Rightarrow \mathbf{n = 5}$

- Para calcular la suma de los términos de una sucesión aritmética se deben conocer el primer término, el último y la cantidad de términos.

La suma de los **n** primeros términos es: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) . n}{2}$

12. Sucesiones. Sucesiones aritméticas

Test de comprensión

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que si $a_n = n^2$ entonces $a_4 = 8$?
   b. ¿Es cierto que los siguientes términos corresponden a una sucesión aritmética? 12; 7; 2; −3
   c. En una sucesión aritmética, ¿es cierto que si $S_4 = 24$; $r = 2$ entonces $a_3 = 7$?

2. Escriban 3 términos más para cada sucesión y el término general cuando sea posible.

a. 3; 2; 1; ______ $a_n =$ ______
c. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$; ______ $a_n =$ ______
b. −1; −8; −27; ______ $a_n =$ ______
d. −1; 1; −1; 1; ______ $a_n =$ ______

3. Escriban los 4 primeros términos de estas sucesiones; luego, el término de orden 6. Para recordar pág. 51

a. $a_n = n!$ ______ $a_6 =$ ______
d. $a_n = n^{\frac{1}{2}}$ ______ $a_6 =$ ______
b. $a_n = \frac{n+1}{n}$ ______ $a_6 =$ ______
e. $a_n = 2 \,.\, (n + 1)$ ______ $a_6 =$ ______
c. $a_n = n \,.\, (n - 1)$ ______ $a_6 =$ ______
f. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ______ $a_6 =$ ______

4. Observen la siguiente sucesión de figuras y resuelvan.



a. Grafiquen el cuarto término de la sucesión. a_1 a_2 a_3 a_4

b. Agreguen 3 términos a la sucesión formada por la cantidad de segmentos que compone cada figura. 3; 5; 7; 9: ______

c. Encuentren el término general y calculen el 10.° término de la sucesión. ______

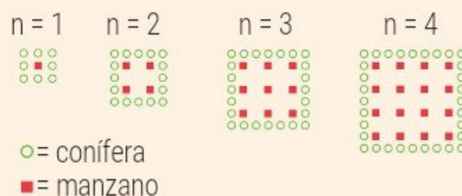
5. Completen con el dato pedido en cada una de las siguientes sucesiones aritméticas.

a. $a_1 = -\frac{1}{2}$; $r = \frac{1}{2}$ $a_8 =$ ______
c. $a_2 = 1 + \sqrt{2}$; $a_5 = 1 + 4\sqrt{2}$ $S_6 =$ ______
b. $a_5 = 3$; $a_7 = 11$ $r =$ ______
d. $a_3 = 7$; $r = -2$; $a_n = -1$ $n =$ ______



6. Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.

Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado y para protegerlos del viento planta coníferas alrededor. En el esquema se puede apreciar la distribución según la cantidad de filas de manzanos (n).



a. Completen la tabla.

n (cantidad de filas)	1	2	3	4	5	n
M (cantidad de manzanos)	1					
C (cantidad de coníferas)	8					

b. Hallen el valor de **n** para el cual la cantidad de manzanos coincide con el de coníferas. ______

c. A medida que aumenta la cantidad plantada, ¿qué se incrementará más rápidamente: la cantidad de manzanos o la de coníferas? Expliquen la respuesta. ______

13. Sucesiones geométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **sucesión geométrica** a aquella en la cual cada término de la misma se obtiene multiplicando el anterior por un número constante **q** llamado razón geométrica.

$3 \quad -6 \quad 12 \quad -24 \quad 48...$

$3 . (-2) \quad -6 . (-2) \quad 12 . (-2) \quad -24 . (-2)$

Sucesión geométrica con $q = -2$

Para que una sucesión sea geométrica debe verificarse que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Leftrightarrow a_1 \neq 0$$

El término general a_n es: $\mathbf{a_n = a_1 . q^{n-1}}$

En una sucesión geométrica cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor constante **q**.

$a_1 = a_1 . q^0$

$a_2 = a_1 . q^1$

$a_3 = a_2 . q = a_1 . q . q = a_1 . q^2$

$a_4 = a_3 . q = a_1 . q . q . q = a_1 . q^3$

$a_n = a_{n-1} . q = a_1 . \underbrace{q . q . q . q ... q}_{n-1 \text{ veces}} = a_1 . q^{n-1}$

La **razón** es igual al cociente entre dos términos consecutivos:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \wedge n \in \mathbb{N} - \{1\}$$

• Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica conociendo dos términos consecutivos, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_5 si $a_1 = 4$ y $a_2 = 2$.

$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{2}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$ — **1.** Se halla la razón.

$a_5 = a_1 . q^{5-1} \Rightarrow a_5 = 4 . \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow a_5 = 4 . \frac{1}{16} \Rightarrow \mathbf{a_5 = \frac{1}{4}}$ — **2.** Se calcula cada término.

• Para calcular un término determinado de una sucesión geométrica conociendo otro término y la razón, se deben seguir estos pasos.

Calculen a_2 si $a_4 = 1$ y $q = 2$.

Se considera a a_2 como primer término ($a_2 \Rightarrow a_1$) y a a_4, por lo tanto, como tercero ($a_4 \Rightarrow a_3$).

$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow a_3 = a_1 . 2^{3-1} \Rightarrow 1 = a_1 . 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{a_2 = \frac{1}{4}}$

• Para calcular la cantidad de términos de una sucesión geométrica, se deben seguir estos pasos.

Calculen la cantidad de términos de la sucesión geométrica sabiendo que $a_1 = 0,5$; $a_2 = 2$; $a_n = 512$.

$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{2}{0,5} \Rightarrow q = 4$

$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow 512 = a_1 . 4^{n-1} \Rightarrow 512 = 0,5 . 4^{n-1} \Rightarrow 1024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow \mathbf{n = 6}$

La **suma de los n primeros términos** de una sucesión geométrica se obtiene de la siguiente manera:

$S_n = a_1 + a_1 . q + a_1 . q^2 + ... + a_1 . q^{n-1}$ (1)

$S_n . q = a_1 . q + a_1 . q^2 + a_1 . q^3 + ... + a_1 . q^{n-1} + a_1 . q^n$ ← (2) Se multiplican ambos miembros de (1) por **q**.

$- \quad S_n = a_1 + a_1 . q + a_1 . q^2 + ... + a_1 . q^{n-1}$ (1)

$S_n . q - S_n = -a_1 \qquad + a_1 . q^n$ ← Se resuelve (2) − (1)

$$S_n . q - S_n = -a_1 + a_1 . q^n \Rightarrow S_n . (q - 1) = a_1 . (-1 + q^n) \Rightarrow \mathbf{S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}} \wedge q \neq 1$$

ACTIVIDADES

13. Sucesiones geométricas

Test de comprensión

7. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. En una sucesión geométrica $a_3 = 2$ y $a_5 = 4$, ¿es cierto que $q = \sqrt{2}$?

b. El término general de una sucesión geométrica es: $a_n = 3 \,.\, (-2)^n$. ¿Es cierto que $a_4 = -48$?

c. En una sucesión geométrica $a_4 = 54$ y $a_2 = 6$. ¿Es cierto que $|q|$ es 3?

8. Completen con el dato que falta en cada caso, teniendo en cuenta que las sucesiones son geométricas.

a. $a_2 = 3; q = -\frac{1}{2}$ $a_6 =$ ______

b. $a_6 = 32; a_2 = 2$ $|q| =$ ______

c. $a_1 = \sqrt{2}; q = 2; S_n = 31\sqrt{2}$ $n =$ ______

d. $a_n = 3 \,.\, 2^n$ $q =$ ______ $S_4 =$ ______

9. Calculen la suma de los 6 primeros términos de las siguientes sucesiones geométricas.

a. $a_2 = 4; q = \frac{1}{2}; S_6 =$ ______



b. $a_3 = \frac{9}{2}; q = \frac{3}{2}; S_6 =$ ______

c. $a_n = (-3)^n; S_6 =$ ______

d. $a_n = -3^n; S_6 =$ ______

10. Tengan en cuenta que las sucesiones son geométricas y resuelvan.

a. Intercalen 2 términos entre el término de valor 5 y el término de valor 135 de la sucesión.

______

b. En una sucesión de razón $\frac{1}{2}$, la suma entre el primer y el tercer término es 2. Calculen la suma de los 4 primeros términos.

______

c. Calculen el valor de los 5 primeros términos de una sucesión sabiendo que $a_1 = -3$ y $S_2 = 3$.

______

11. Marquen con una X la opción correcta.

a. En una sucesión geométrica la suma entre el cuarto y el segundo término es $6\sqrt{2}$ y la diferencia entre ellos es $2\sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de la razón?

______

______

- 4 ☐
- $2\sqrt{2}$ ☐
- $\sqrt{2}$ ☐

b. En una sucesión geométrica $a_n = 3^{n-1}$, ¿cuál es el valor de la suma de los 5 primeros términos?

______

______

- 120 ☐
- 121 ☐
- 363 ☐

14. Análisis de sucesiones

▶ SABERES DINÁMICOS

Existen muchas situaciones en las cuales puede aplicarse el concepto de sucesión para resolver diversos problemas de índole práctica.

Cotas superiores e inferiores

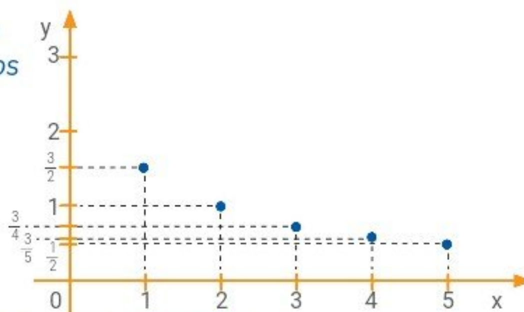
Una sucesión está **acotada superiormente**, si $\exists\, k \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}: k \geq a_n \Rightarrow$ **k** es cota superior en la sucesión.
Una sucesión está **acotada inferiormente**, si $\exists\, k \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}: k \leq a_n \Rightarrow$ **k** es cota inferior en la sucesión.
El **supremo** es la menor de las cotas superiores de una sucesión y el **ínfimo** es la mayor de las cotas inferiores de una sucesión.
Una sucesión es **monótona creciente**, si $\exists\, n \in \mathbb{N}: a_n \geq a_{n-1}$.
Una sucesión es **monótona decreciente**, si $\exists\, n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n-1}$.

TIP

$\exists$ significa existe.
$\forall$ significa para todo.

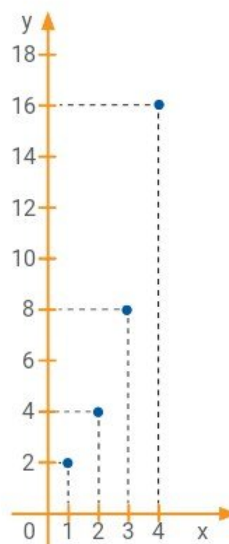
Si el término general de una sucesión es:
$a_n = \frac{3}{n+1}$, *entonces la sucesión será:* $\frac{3}{2}; 1; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; ...$

En el gráfico están representados los valores que toman los primeros 5 términos de la sucesión.



- *Esta sucesión está acotada superior e inferiormente.*
- *En este ejemplo 2, 3, 5, 8, 100, son cotas superiores y 0, −1, −2, −3, −4, son cotas inferiores.*
- *El supremo es 1,5 y el ínfimo es 0.*
- *También se afirma que esta sucesión es monótona decreciente, al ser cada término menor que el anterior.*

Si el término general de una sucesión es:
$a_n = 2^n$ *entonces la sucesión será: 2; 4; 8; 16; 32; ...*
En el gráfico están representados los primeros 4 valores que toma la sucesión.





- *Esta sucesión está acotada inferiormente.*
- *En este ejemplo 1, 0, −1, −2, −3, −4, son cotas inferiores.*
- *El ínfimo es 2.*
- *También se afirma que esta sucesión es monótona creciente, al ser cada término mayor que el anterior.*